Igualdad

Una **igualdad** se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.

Identidad

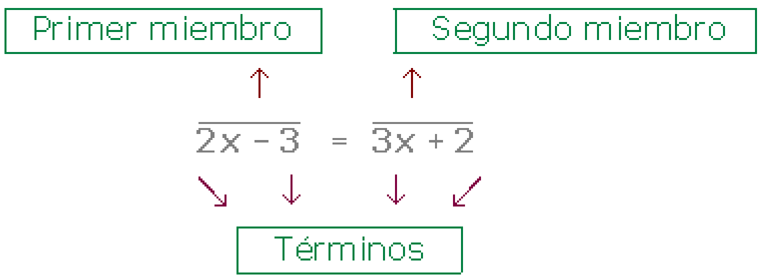
Una identidad es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.

Ecuación

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

Los **miembros** de una ecuación son **cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.**

Los **términos son los sumandos que forman los miembros.**



Las **incógnitas son las letras que aparecen en la ecuación.**

Las **soluciones** son los **valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.**

El **grado** de una ecuación es el **mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.**

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

Resolución de ecuaciones de primer grado

En general para resolver una ecuación debemos seguir los siguientes **pasos**:

1º **Quitar paréntesis.**

2º **Quitar denominadores.**

3º **Agrupar los términos en *x* en un miembro y los términos independientes en el otro.**

4º **Reducir los términos semejantes.**

5º **Despejar la incógnita.**

Ejemplo

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos corchete:

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos paréntesis:

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos denominadores:

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)=8x-(5x-3)+36x$$

Quitamos paréntesis:

$$24+24x+24+6x-18=8x-5x+3+36x$$

Agrupamos términos:

$$24x+6x-8x+5x-36x=3-24-24+18$$

Sumamos:

$$-9x=-27$$

Dividimos los dos miembros por: −9

$$x=3$$

Expresiones algebraicas

Trabajar en álgebra consiste en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se llaman variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras.

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Las expresiones algebraicas nos permiten, por ejemplo, hallar áreas y volúmenes.

> Longitud de la circunferencia: , donde r es el radio de la circunferencia.
>
> Área del cuadrado: $S = l^2$, donde l es el lado del cuadrado.
>
> Volumen del cubo: $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

Expresiones algebraicas comunes

El **doble o duplo** de un número: 2x

El **triple** de un número: 3x

El **cuádruplo** de un número: 4x

La **mitad** de un número: x/2.

Un **tercio** de un número: x/3.

Un **cuarto** de un número: x/4.

Un número es **proporcional** a 2, 3, 4, ...: 2x, 3x, 4x,..

Un número al **cuadrado**: x^2

Un número al **cubo**: x^3

Dos números **consecutivos**: x y x + 1.

Dos números **consecutivos pares**: 2x y 2x + 2.

Dos números **consecutivos impares**: 2x + 1 y 2x + 3.

Descomponer 24 **en dos partes**: x y 24 − x.

La **suma** de dos números es 24: x y 24 − x.

La **diferencia** de dos números es 24: x y 24 + x.

El **producto** de dos números es 24: x y 24/x.

El **cociente** de dos números es 24; x y 24 · x.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. $-x^2 + 7x - 10 = 0$

Si es $a < 0$, multiplicamos los dos miembros por (-1).

$$(-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

CONCEPTOS GENERALES SOBRE LA FACTORIZACIÓN:

CASOS DE FACTOREO

- **FACTOR COMÚN**

Procedimiento:

1° Paso: Buscamos el ***factor común*** (que debe ser el mayor posible)

2° Paso: Se expresa el ***polinomio dado*** como el producto del **factor común** por el polinomio que resulta de dividir el polinomio dado por el factor común.

Ejemplos:

FactorizaciónFactorización

$4a^2b + 2ab^2$

Factor comun

- $2ab(2a+b)$

$3xby - 9xa$

Factor comun

- $3x(by-3a)$

- **FACTOR COMÚN POR GRUPOS**

Se aplica en polinomios que no tienen factor común en todos sus términos.

Procedimiento

1° Paso: Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se sustrae dicho factor común en cada uno de los grupos.

2° Paso: Debe quedar un paréntesis común.

3° Paso: Se extrae dicho paréntesis como factor común.

Ejemplos:

$2xy^2a + mb + 2xy^2b + ma$

Agrupo

$\left(2xy^2a + ma\right) + \left(mb + 2xy^2b\right)$

Factor Com n

$a(2xy^2 + m) + b(m + 2xy^2)$

Factor Com n

- $(2xy^2 + m)(a + b)$ Factor Com n por Grupos

$(x^2 + ax) + (bx + ab)$

Factor comun

$x(x + a) + b(x + a)$

Factor comun

- $(x + a)(x + b)$ Factor Comun por Grupo

- **<u>TRINOMIO CUADRADO PERFECTO</u>**

<u>Recuerdo:</u> "Cuadrado de un Binomio"

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

<u>Procedimiento:</u>

<u>1°Paso:</u> Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no deben tener un signo negativo adelante.

Y calculo sus raíces cuadradas, dichas raíces serán las bases.

<u>2° Paso:</u> Luego calculo el doble producto de sus bases; y luego nos fijamos si se verifica que el doble producto figura en el trinomio dado,

<u>3° Paso:</u> Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces decimos que es un Trinomio Cuadrado Perfecto; y luego lo factorizo como el cuadrado de un binomio, formado por dichas bases.

<u>OBSERVACIONES MUY IMPORTANTES:</u>

- Si el doble producto que figura en el ***"Trinomio dado"*** es positivo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán las dos el mismo signo.

- Si el doble producto que figura en el ***"Trinomio dado"*** es negativo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán signos opuestos.

Ejemplos:

1)

$$4x^2+12xz+9z^2$$

$$\sqrt{4x^2}=2x$$

$$\sqrt{9z^2}=3z \qquad \text{Es un Trinomio Cuadrado Perfecto}$$

$$2.2x.3z=12xz$$

Entonces: $4x^2+12xz+9z^2=(2x+3z)^2\, o(-2x-3z)^2$

2)

$$4x^6+\frac{1}{16}+x^3$$

$$\sqrt{4x^6}=2x^3$$

$$\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4} \qquad \text{Es un Trinomio Cuadrado Perfecto}$$

$$2.2x^3.\frac{1}{4}=x^3$$

Entonces: $4x^6+\frac{1}{16}+x^3=(2x^3+\frac{1}{4})^2\, o(-2x^3-\frac{1}{4})^2$

- **CUATRINOMIO CUBO PERFECTO**

Recuerdo: "Cubo de un Binomio"

$$\left(x+y\right)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Procedimiento:

1°Paso: Se reconocen los cubos perfectos

Y calculo sus raíces cúbicas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso:

Luego calculo:

- el triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda
- el triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda

Luego nos fijamos si estos cálculos figuran en el cuatrinomio dado,

3° Paso: Si estos cálculos figuran en el trinomio dado, entonces decimos que es un Cuatrinomio Cubo Perfecto; y luego lo factorizo como el cubo de un binomio, formado por dichas bases.

OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE:

Las bases que figuran en el Cubo del Binomio, van a conservar su signo.

Ejemplos:

1)

$8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

$\sqrt[3]{8a^3} = 2a$

$\sqrt[3]{-27b^3} = -3b$ Es un Cuatrinomio Cubo Perfecto

$3.(2a)^2.(-3b) = -36a^2b$

$3.(2a).(-3b)^2 = 54ab^2$

Entonces: $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = (2a - 3\text{b})^3$

2)

$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^3} = \frac{1}{2}x$

$\sqrt[3]{-1} = -1$

$3.(\frac{1}{2}x)^2.(-1) = -\frac{3}{4}x^2$ Es un Cuatrinomio Cubo Perfecto

$3.\frac{1}{2}x.(-1)^2 = \frac{3}{2}x$

Entonces: $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (\frac{1}{2}x - 1)^3$

- **DIFERENCIA DE CUADRADOS**

Recuerdo: Producto de Binomios Conjugados

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

Procedimiento:

<u>1° Paso:</u> Debo identificar la resta (debe haber un solo signo negativo) y luego los cuadrados perfectos.

<u>2° Paso:</u> Calculo las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

<u>3° Paso:</u> Transformo la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formado por dichas bases.

<u>Ejemplos:</u>

1)

$$9x^2 - 25y^2$$

$$\sqrt{9x^2} = 3x \qquad \text{Entonces: } 9x^2 - 25y^2 = (3x+5y)(3x-5y)$$

$$\sqrt{25y^2} = 5y$$

2)

$$\frac{4}{9}x^6 - z^4y^2$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}x^6} = \frac{2}{3}x^3 \qquad \mathit{Entonces:} \frac{4}{9}x^6 - z^4y^2 = \ \frac{2}{3}x^3 + z^2y \quad \frac{2}{3}x^3 - z^2y$$

$$\sqrt{z^4y^2} = z^2y$$

Factorización de un polinomio de grado superior a dos

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini para encontrar las raíces enteras.

Los pasos a seguir los veremos con el polinomio:

$P(x) = 2x^4 + x^3 − 8x^2 − x + 6$

1Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 − 8 \cdot 1^2 − 1 + 6 = 2 + 1− 8 − 1 + 6 = 0$

3Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4Por ser la división exacta, **D = d · c**

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Una raíz es x = 1.

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es x = −1.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar **raíces enteras**.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por −1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos **factor común** 2 en último binomio y encontramos una raíz racional.

$2x - 3 = 2 (x - 3/2)$

La **factorización del polinomio** queda:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2 (x -1) \cdot (x +1) \cdot (x +2) \cdot (x - 3/2)$

Las raíces son : $x = 1$, $x = - 1$, $x = -2$ y $x = 3/2$